

02

Teorías geométricas de la naturaleza

Principios geométricos de la física

En este capítulo se analiza como las propiedades geométricas del espacio y del tiempo restringe la forma de las ecuaciones de las leyes físicas, y de como de estas propiedades se derivan muchos de los principios de conservación de la naturaleza.

A partir de la geometría, se puede reconstruir cuales son los fundamentos de las principales teorías de la mecánica clásica y dejar al descubierto muchas de las hipótesis que implícitamente asumen, que limitan su rango de validez, pero que sin embargo, habitualmente en los libros de texto no se comentan con el suficiente detalle.

Espacio de la geometría euclídea

Identificamos las coordenadas en el espacio plano euclídeo tridimensional como

$$\vec{x} \equiv (x^i) \equiv (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$$

La distancia entre dos puntos forma matemáticamente un espacio vectorial con una métrica o producto interno definida.

El elemento de distancia Δs entre dos puntos $\vec{x}$ y $\vec{x} + \Delta \vec{x}$ viene dado por es un sistema de coordenadas ortogonal por el teorema de Euclides:

$$\Delta s^2 \equiv \delta_{ij} x^i x^j = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Los significados del campo electromagnético

El espacio físico geométrico euclídeo, se caracteriza por la situación estática, en que no hay ningún observador en movimiento.

En el espacio euclídeo plano, isótropo y homogéneo, se pueden realizar las siguientes transformaciones fundamentales:

Rotación: Una rotación de un punto alrededor de un eje en el espacio euclídeo, se define por una matriz $\bar{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}^i_j)$ con determinante igual a la unidad $|\mathcal{R}| = 1$.

$$\vec{x} \xrightarrow{\bar{\mathcal{R}}} \vec{x}' = \bar{\mathcal{R}}\vec{x} \quad \text{o} \quad x'^i = \mathcal{R}^i_j x^j$$

Las rotaciones en el espacio euclídeo alrededor de un eje, al preservar la norma de los vectores, están representadas por matrices ortogonales-unitarias que verifican las siguientes relaciones

$$I = \mathcal{R}^k_i \mathcal{R}^i_j = \mathcal{R}^k_i \mathcal{R}^j_k = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \delta^i_j \quad \text{o} \quad \mathcal{R}^T \equiv \mathcal{R}^{-1}$$

siendo $\mathcal{R}^T$ es la matriz transpuesta de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1}$ su matriz inversa.

Por tanto las rotaciones vienen determinadas por matrices ortogonales y unitarias.

Una rotación es activa cuando se mantienen fijos los ejes de referencia, y es una transformación que mueve un punto físico P de coordenadas $\vec{x}$ a otro punto P' de coordenadas $\vec{x}'$ rotando alrededor de un eje fijo.

En una transformación es pasiva si lo que se mantiene fijo es el punto físico P , y lo que se rota son los ejes coordenados alrededor de un eje fijo.

Las transformaciones de una rotación activa o pasiva, son por tanto, inversas una de otra.

Para evitar equívocos, cuando en el texto nos refiramos a una matriz de rotación $\bar{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}^i_j)$ en una transformación, supondremos que su coeficientes vienen dados por

$$\mathcal{R}^i_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

En general adoptaremos en el texto el punto de vista de las transformaciones activas, ya que corresponde más intuitivamente a desplazamientos por el espacio físico.

Las rotaciones alrededor de un eje forman un grupo de transformaciones que dependen de parámetro continuo que es el ángulo de rotación.

Traslación espacial: Una translación pasiva $\bar{\mathcal{T}}_e$ en el espacio euclídeo se define por un traslado de los ejes de coordenadas de coordenadas

$$\vec{x} \xrightarrow{\vec{T}_e} \vec{x}' = \vec{T}_e \vec{x} \equiv \vec{x} - \vec{a}$$

donde $\vec{a}$ es el vector de translación uniforme de todas las coordenadas.

En una transformación pasiva lo que se mantiene fijo es el punto físico P , y lo que se traslada son los ejes coordenados.

En una translación activa se mantienen fijos los ejes de referencia, y es una transformación que pasa un punto físico P de coordenadas $\vec{x}$ otro punto P' $\vec{x}'$ trasladado. Las transformaciones activa o pasiva, son por tanto inversas una de otra cambiando $\vec{a}$ por $-\vec{a}$.

Las translaciones también forman un subgrupo continuo.

Inversión y Paridad: Una inversión respecto al origen de coordenadas o transformación de paridad $\vec{P}$, es equivalente a invertir el signo de las coordenadas

$$\vec{x} \xrightarrow{\vec{P}} \vec{x}' = \vec{P} \vec{x} \equiv -\vec{x}$$

Obsérvese que la aplicación de dos veces consecutivas del operador paridad da la identidad

$$\vec{P}^2 = \vec{I}$$

Esto indica que cualquier estado se puede descomponer como la suma de dos estados, uno de paridad positiva y otro de paridad negativa. Por ejemplo, una función $f(\vec{x})$, se puede descomponer de la forma:

$$f(\vec{x}) = f^+(\vec{x}) + f^-(\vec{x})$$

siendo

$$f^+(\vec{x}) = \frac{1}{2}(1 + \mathcal{P})f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) + f(-\vec{x})) \text{ y } f^-(\vec{x}) = \frac{1}{2}(1 - \mathcal{P})f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - f(-\vec{x}))$$

Se verifica entonces que

$$\mathcal{P}f^+(\vec{x}) = +f^+(\vec{x}) \text{ y } \mathcal{P}f^-(\vec{x}) = -f^-(\vec{x})$$

Se dice que un sistema tiene *quiralidad*, si este tiene una paridad definida ante una inversión de coordenadas. Se ha comprobado que todas las teorías clásicas no tienen una *quiralidad* definida, y que en las interacciones siempre se conserva la paridad.

Una interacción que conserva la paridad se puede definir como paridad covariante.

Si un sistema no conserva la paridad en sus interacciones, una transformación pasiva puede llevar a un estado en que las ecuaciones del sistema no correspondan con la evolución real del sistema.

Si las ecuaciones de la evolución del sistema conservan la paridad, estas deben ser forma invariantes por la inversión de las coordenadas.

Que las ecuaciones clásicas sean paridad covariante es una restricción adicional que limita la forma de las ecuaciones.

La paridad es una simetría que tiene un caracter multiplicativo debido a que es una simetría discreta, a diferencia de las simetrías continuas como las rotaciones y las translaciones, que dan lugar a magnitudes conservativas aditivas como el momento y la energía, o la carga eléctrica debida a las simetrías gauge. En mecánica cuántica las magnitudes aditivas corresponden también a valores propios de generadores de simetrías unitarias continuas.

Tanto en las translaciones como en las inversiones, se puede también distinguir entre transformaciones activas o pasivas, aunque sus operadores son inversos uno de otro.

Cuando se considera la dimensión temporal en la que evolucionan los sistemas físicos, se pueden hacer también las siguientes transformaciones:

Translación temporal: Una translación temporal es equivalente a efectuar una translación de la coordenada temporal:

$$t \xrightarrow{\mathcal{T}_t} t' = \mathcal{T}_t t \equiv t + t_0$$

Inversión temporal: La inversión temporal $\mathcal{T}$, se define como la transformación que invierte el signo de la coordenada temporal:

$$t \xrightarrow{\mathcal{T}_t} t' = \mathcal{T} t \equiv -t$$

Si la inversión temporal de las ecuaciones que representan la evolución temporal de un sistema, reproduce una trayectoria física admisible, se dice entonces que el sistema es invariante ante una inversión temporal.

Las leyes de la física clásica y algunas de la mecánica cuántica, son invariantes temporalmente. Sin embargo no se les puede asignar un estado ± 1 , ya que la inversión temporal se hace para un instante t determinado.

En una inversión pasiva del tiempo (se invierte el sentido del eje temporal), entonces $\mathcal{T}_i d\vec{x}(t)/dt = -d\vec{x}(-t)/dt$; es decir, en la inversión pasiva se invierte la velocidad,

aunque debe tenerse en cuenta que la nueva trayectoria no es lo mismo que si el sistema evolucionase hacia el pasado.

Solo si el sistema tiene invarianza temporal, entonces la trayectoria obtenida por la transformación pasiva será una trayectoria física real, y además las transformaciones pasivas y activas serán equivalentes. Si no es invariante la transformación activa puede llevar a otro estado físicamente diferente, y la pasiva incluso a un estado que no es físicamente real.

Todos los sistemas clásicos (como la mecánica newtoniana y la electrodinámica clásica) son invariantes ante las transformaciones temporales y de paridad.

Conjugación de la carga $\mathcal{C}$: La conjugación de carga $\mathcal{C}$, se define como la transformación que invierte el signo de todas las cargas eléctricas en un sistema:

$$q \xrightarrow{\mathcal{C}} q' = \mathcal{C}q \equiv -q$$

Las cargas interactúan de forma que las ecuaciones son invariantes ante la conjugación de la carga. El producto de las transformaciones de la conjugación y de la paridad $\mathcal{CP}$ se conserva excepto en las interacciones débiles nucleares.

Sin embargo, experimentalmente se ha comprobado que siempre se conserva el producto de las transformaciones $\mathcal{CPT}$, por lo se considera su conservación en las interacciones como un principio general.

Isometría 7-paramétrica de las 5 $\mathcal{E}$ -transformaciones euclídeas

Las 5 transformaciones euclídeas que comprende los grupos de las rotaciones $\bar{\mathcal{R}}$, las translaciones espaciales $\bar{\mathcal{T}}_e$, las translaciones temporales $\mathcal{T}_t$, dependen de un total de 7 parámetros continuos. Las otras dos transformaciones de la inversión temporal $\mathcal{T}_i$, y las inversiones de paridad $\bar{\mathcal{P}}$, son transformaciones discretas.

Todas las leyes de la física clásica obedecen a las tres primeras, y son invariantes respecto a las dos últimas.

Las transformaciones euclídeas conservan la norma y los ángulos entre vectores.

Además, como no hay observador en movimiento, transformaciones euclídeas incorporan el principio de relatividad en una forma elemental.

Campos euclídeos

A continuación se analiza cómo se transforman los campos escalares $\phi(\vec{x}, t)$, vectoriales $\vec{V}(\vec{x}, t)$ y tensoriales ante las transformaciones euclídeas.

Para una translación activa $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$, se mantienen fijos los ejes de coordenadas y lo que se desplaza es el objeto físico (p.e. una función escalar) en el espacio un vector $-\vec{a}$, por lo que en el punto $\vec{x}'$ al que traslada su valor es el mismo que en el punto $\vec{x}$, por lo que será

$$\phi(\vec{x}, t) \xrightarrow{\vec{T}_e} \phi'(\vec{x}', t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \Rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} - \vec{a}, t)$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\vec{T}_e} \vec{V}'(\vec{x}', t) \Rightarrow \vec{V}'(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x} - \vec{a}, t)$$

Por la prima en la función $\phi'(\vec{x}', t)$, se indica que la forma de dependencia funcional respecto a $\vec{x}'$ después de la transformación es distinta que la de $\phi(\vec{x}, t)$ respecto a $\vec{x}$.

En el caso de una translación pasiva de cambio de ejes de coordenadas, $\vec{x}'$ y $\vec{x}$ se refieren a un mismo punto del espacio físico y la transformación es simplemente un cambio de coordenadas, por lo que se obtienen expresiones similares, teniendo en cuenta que una translación pasiva o activa se pueden considerar como la inversa una de otra cambiando $\vec{a}$ por $-\vec{a}$.

Para una rotación $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \bar{\mathcal{R}}\vec{x} \equiv \mathcal{R}^i_j x^j$

$$\phi(\vec{x}, t) \xrightarrow{\bar{\mathcal{R}}} \phi'(\vec{x}', t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \Rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\bar{\mathcal{R}}^{-1}\vec{x}, t)$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\bar{\mathcal{R}}} \vec{V}'(\vec{x}', t) = \bar{\mathcal{R}}\vec{V}(\vec{x}, t) \Rightarrow \vec{V}'(\vec{x}, t) = \mathcal{R}^i_j V^j(\bar{\mathcal{R}}^{-1}\vec{x}, t)$$

En el caso de la transformación de paridad o inversión $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \bar{\mathcal{P}}\vec{x} \equiv -\vec{x}$ se tiene

$$\phi(\vec{x}, t) \xrightarrow{\bar{\mathcal{P}}} \phi'(\vec{x}', t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \Rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\bar{\mathcal{P}}^{-1}\vec{x}, t)$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\bar{\mathcal{P}}} \vec{V}'(\vec{x}', t) \Rightarrow \vec{V}'(\vec{x}, t) = -V^j(\bar{\mathcal{P}}^{-1}\vec{x}, t)$$

En el caso de tensores las componentes quedarían multiplicadas por $(-1)^r$, siendo r el rango del tensor. Los campos escalares y vectoriales se pueden considerar como tensores de rango 0 y 1 respectivamente.

Se debe tener en cuenta, que en el caso de campos impropios, llamados también pseudoscalares, pseudovectores (axiales) o pseudotensores, ante una transformación de paridad o inversión, sus componentes cambian el signo, por lo que las anteriores expresiones hay que multiplicarlas por -1 después de la inversión.

Para la inversión temporal $t \rightarrow t' = \mathcal{T}t \equiv -t$ tenemos

$$\phi(\vec{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{T}} \phi'(\vec{x}', t) \equiv \phi(\vec{x}, t) \Rightarrow \phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, \mathcal{T}^{-1}t)$$

$$\vec{V}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\mathcal{T}} \vec{V}'(\vec{x}, t') \Rightarrow \vec{V}'(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x}, \mathcal{T}^{-1}t)$$

Transformaciones infinitesimales euclídeas

El teorema de Noether de forma general establece que, si un sistema es invariante (simetrías) ante un grupo de transformaciones que dependen de N parámetros continuos, entonces, existen N magnitudes que se conservan el tiempo. De aquí la importancia de estudiar las simetrías de los sistemas físicos, ya que de ellas se derivan los principios de conservación de la naturaleza.

Las transformaciones como las traslaciones espaciales, temporales, las rotaciones y boost con desplazamiento relativo de velocidad, dependen de parámetros continuos, y tienen estructura de grupo. Por ello, una transformación cualquiera se puede descomponer como la aplicación de transformaciones sucesivas infinitesimales. Por esta razón, la estructura de la transformación infinitesimal es suficiente para caracterizar las propiedades del grupo de una transformación. Veremos más adelante que muchas de las ecuaciones físicas tienen que ser invariantes ante determinadas transformaciones, por lo que será suficiente analizar las transformaciones infinitesimales para determinar sus propiedades.

Las transformaciones continuas, que dependen de un parámetro continuo, se pueden representar en función de una transformación infinitesimal debida a una variación infinitesimal de dicho parámetro.

Si $\mathcal{D}(\theta)$ es un grupo de transformaciones continuas dependiente de un parámetro continuo θ , se verificará entonces por la estructura de grupo:

$$\mathcal{D}(0) = I$$

$$\mathcal{D}(\theta_1 + \theta_2) = \mathcal{D}(\theta_2)\mathcal{D}(\theta_1)$$

$$\mathcal{D}(-\theta)\mathcal{D}(\theta) = I$$

donde I es la transformación identidad, y θ_1, θ_2 son los parámetros de dos transformaciones cualesquiera de grupo.

Si $\Delta\theta$ es un parámetro infinitesimal, la transformación infinitesimal vendrá dada por

$$\Delta\mathcal{D}(\Delta\theta) \approx I + \Delta\theta G$$

Los significados del campo electromagnético

A $\mathcal{G}$ se le denomina generador de la transformación, que se puede definir también como

$$\mathcal{G} \equiv \left. \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}$$

Por tanto, la transformación $\mathcal{D}(\theta)$ se puede representar simbólicamente como la aplicación sucesiva de transformaciones infinitesimales

$$\mathcal{D}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta \mathcal{G}}{n} \right)^n = e^{\theta \mathcal{G}}$$

La anterior expresión para $\mathcal{D}(\theta)$ representa simbólicamente el desarrollo en serie de potencias del operador $\mathcal{G}$

$$\mathcal{D}(\theta) = e^{\theta \mathcal{G}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta \mathcal{G})^n$$

Si existe un conjunto de generadores G_i asociados unas transformaciones $\mathcal{D}_i$ que verifican las relaciones de conmutación

$$[G_i, G_j] \equiv G_i G_j - G_j G_i = c_{ijk} G_k$$

entonces, se dice que el conjunto de transformaciones forma un álgebra de Lie, y la constantes c_{ijk} se denominan constantes del grupo de Lie.

Para una translación activa infinitesimal $\Delta \vec{a}$ de coordenadas de un campo escalar ϕ , se verifica

$$\vec{x}' = \vec{x} + \Delta \vec{a}$$

$$\phi'(\vec{x}, t) \equiv \phi(\vec{x} - \Delta \vec{a}, t) \approx \phi(\vec{x}, t) - \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \cdot \Delta \vec{a}$$

El generador asociado será entonces

$$\vec{\mathcal{G}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -\vec{\nabla}$$

y el operador de translación adopta la expresión

$$\bar{T}_e(\vec{a}) = e^{-\vec{a} \cdot \vec{\nabla}}$$

que actúa de la forma

$$\phi'(\vec{x}, t) = \bar{T}_e(\vec{a}) \phi(\vec{x}, t) = e^{-\vec{a} \cdot \vec{\nabla}} \phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} - \vec{a}, t)$$

Vemos que operador gradiente está asociado a la translación espacial.

Los mismo se obtiene para una translación pasiva basta cambiando el signo de $\vec{a}$.

El significado del operador translación es más claro cuando se descompone $\phi(\vec{x}, t)$ en sus componentes de Fourier, en que lo que hace es multiplicar cada una de ellas por la fase $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}}$.

Una propiedad del subgrupo de las translaciones espaciales es que conmutan entre sí.

Es decir si $\mathcal{T}_e(\vec{a})$ y $\mathcal{T}_e(\vec{b})$ son dos translaciones, se verifica

$$[\bar{\mathcal{T}}_e(\vec{a})\bar{\mathcal{T}}_e(\vec{b}) - \bar{\mathcal{T}}_e(\vec{b})\bar{\mathcal{T}}_e(\vec{a})]\phi(\vec{x}, t) \equiv 0$$

lo que es debido a la propiedad de que el conmutador de los generadores básicos de las translaciones son nulos

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \phi(\vec{x}, t) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right] \phi(\vec{x}, t) \equiv 0$$

Es habitual tomar como base para representar los generadores de las translaciones a los operadores de translación en dirección de los ejes de coordenadas

$$p^k = -\frac{\partial}{\partial x^k}$$

El operador de translación espacial está relacionado con el operador gradiente, que nos compara para un mismo instante de tiempo los estados de un sistema en dos puntos próximos del espacio.

El operador de una translación temporal activa $t' = t + t_0$ se obtiene directamente de la expresión anterior

$$\phi'(\vec{x}, t) = \mathcal{T}(t_0)\phi(\vec{x}, t) = e^{-t_0 \frac{\partial}{\partial t}} \phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t - t_0)$$

El operador de translación temporal está relacionado con la evolución temporal a través de la derivada temporal, que nos compara en un punto dos estados próximos en el tiempo.

El operador translación cuando se descompone $\phi(\vec{x}, t)$ en su espectro de frecuencias temporales, lo que hace es multiplicar cada una de ellas por la fase $e^{-i\omega t_0}$.

Una rotación activa infinitesimal $\delta\theta$ en el espacio euclídeo alrededor de un eje con dirección del vector unitario $\vec{n}$, se puede representar por

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{n} \wedge \vec{x} \Delta\theta$$

Los significados del campo electromagnético

Por tanto, un campo escalar se transformará como

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{R}^{-1}\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} - \vec{n} \wedge \vec{x} \Delta\theta, t) \approx \phi(\vec{x}, t) - \Delta\theta \vec{\nabla} \phi \cdot (\vec{n} \wedge \vec{x})$$

El generador asociado será entonces

$$\mathcal{G} = -\Delta\theta(\vec{n} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{\nabla} = -\Delta\theta \vec{n} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{\nabla})$$

el operador de rotación vendrá dado por

$$\mathcal{R} = e^{-\theta \vec{n} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{\nabla})}$$

El generador de la rotación está asociado al momento angular $\vec{x} \wedge \partial/\partial\vec{x}$ en el eje de rotación $\vec{n}$, verificándose

$$\phi(\vec{x}, t) = \mathcal{R}(\theta \vec{n}) \phi(\vec{x}, t) = e^{-\theta \vec{n} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{\nabla})} \phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} - \theta \vec{n} \wedge \vec{x}, t)$$

El significado del operador rotación es más evidente cuando se descompone $\phi(\vec{x}, t)$ en sus componentes de multipolos.

Una rotación infinitesimal activa se puede representar también como

$$\Delta \vec{\mathcal{R}} = \vec{I} + \Delta \vec{\omega} \quad o$$

$$x^j = (\delta_j^i + \Delta \omega_j^i) x^j$$

donde $\delta \vec{\omega}$ es una matriz infinitesimal antisimétrica

$$\Delta \omega_j^i = -\Delta \omega_i^j$$

ya que debe ser $\Delta \vec{\mathcal{R}} \Delta \vec{\mathcal{R}}^T = I$

Entonces para un campo escalar se verificará

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \phi(\delta \vec{\mathcal{R}}^{-1} \vec{x}, t) = \phi(x^i - \delta \omega_j^i x^j, t) \approx \phi(\vec{x}, t) - \delta \omega_j^i x^j \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial x^i} + \dots \\ &= \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{2} \delta \omega_j^i \left(x^j \frac{\partial \phi}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \end{aligned}$$

por lo que la rotación se puede representar también por el operador

$$\phi(\vec{x}, t) = \mathcal{R} \phi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{1}{2} \delta \omega_j^i (x^j \partial_i - x^i \partial_j)} \phi(\vec{x}, t)$$

Es habitual definir el operador de momento angular como

$$L^{ij} = x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Si definimos

$$\delta\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \delta\omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta\omega_k^j \quad \text{y} \quad \vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} L^k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}L^{ij}$$

donde ε_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico

El operador de rotación activa se puede reescribir en la forma habitualmente conocida

$$\mathcal{R} = e^{\vec{\omega}\vec{L}}$$

Una propiedad del subgrupo de las rotaciones es que no conmutan entre sí, lo que es debido a que sus conmutadores no son nulos y verifican la relación

$$[L^i, L^j]\phi = (L^i L^j - L^j L^i)\phi \equiv \varepsilon^{ijk}L^k\phi$$

En las rotaciones el operador gradiente es invariante

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}\phi$$

9 – Transformaciones galileanas

El principio de la relatividad de Galileo establece que sistemas físicos en movimiento relativo con una velocidad constante uniforme son equivalentes, y por ello las leyes locales físicas deben estar descritas por las mismas ecuaciones independientes de dicha velocidad relativa. Esto se conoce también como la covarianza galileana.

Se introduce el concepto de observador en movimiento relativo. Por ello, el grupo de transformaciones galileanas lo forman el grupo de transformaciones euclidianas más la transformación boost de movimiento relativo $\vec{B}_g$.

Como las transformaciones boost es un subgrupo de transformaciones que complementa las transformaciones geométricas euclidianas, las analizaremos con detalle, ya que al introducir el concepto de observador en movimiento uniforme, indirectamente también se introduce una dimensión del tiempo en que se produce dicho movimiento.

Una transformación boost activa, un punto del espacio físico respecto a unos ejes fijos se desplaza en el tiempo, de acuerdo con la transformación

$$\vec{x} \xrightarrow{\vec{B}_g} \vec{x}' = \vec{B}_g \vec{x} \equiv \vec{x} + \vec{v}t$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la translación uniforme de un sistema de coordenadas S' respecto al sistema S .

Los significados del campo electromagnético

Esta tipo de transformaciones se denomina habitualmente como transformación boost galileana.

Para una transformación infinitesimal pasiva boost, lo que se hace es un cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} - \Delta\vec{v}_0 t \\ t' &= t - \Delta t_0\end{aligned}$$

Un campo escalar se transformará entonces como

$$\phi'(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \Delta\vec{v}_0 t, t + \Delta t_0)$$

Si consideramos transformaciones boost infinitesimales, tendremos

$$\phi'(\vec{x}, t) \approx \phi(\vec{x}, t) + \Delta\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi + \Delta t_0 \partial_t \phi$$

y el generador de la transformación será

$$\vec{G}_b = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi + t_0 \partial_t \phi$$

El operador de la transformación boost galileana será entonces

$$\phi'(\vec{x}, t) = \mathcal{B}_g \phi(\vec{x}, t) = e^{(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} + t_0 \partial_t)} \phi(\vec{x}, t)$$

48

En las transformaciones boost el operador gradiente es invariante

$$\vec{\nabla}' \phi' = \vec{\nabla} \phi$$

lo que es lógico, ya que el gradiente lo que hace es comparar los valores del campo en dos puntos próximos, y en las transformaciones boost se conservan también la norma y los ángulos entre vectores.

Sin embargo, en las transformaciones boost la variación local en el tiempo $\partial_t \phi$ no es invariante ya que se verifica

$$\partial_t' \phi' = \partial_t \phi + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi$$

Esta importante consecuencia, está relacionada con las propiedades del tiempo implícitamente asumidas con el principio de relatividad de galileo de las transformaciones boost, que es necesario analizar en detalle.

Tiempo y simultaneidad galileana

Un hecho importante del principio de relatividad de galileo, es que todas las leyes físicas deben ser invariante ante una transformación boost, en las que el tiempo es una variable absoluta externa que fluye de forma uniforme; lo que implica solo son admisibles las transformaciones en el tiempo por translación temporal

$$t \xrightarrow{T_t} t' = t + t_0$$

esto implica implícitamente la simultaneidad absoluta

$$|\Delta t'| = |\Delta t|$$

Es decir, si dos acontecimientos son simultáneos $\Delta t = 0$ en S , entonces serán también simultáneos $\Delta t' = 0$ en otro sistema S' que se desplace con velocidad uniforme.

Cuando se construye la dinámica de Newton sobre las propiedades cinemáticas de la geometría galileana, esta condición de simultaneidad restringe la forma de las ecuaciones de la dinámica

Otro hecho importante a observar, es que el vector velocidad no es invariante ante una transformación activa boost galileana, ya que si $\vec{v}$ es la velocidad de una partícula, esta se transforma como

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{v}_0 \quad \text{o} \quad \vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_0$$

y por tanto, tampoco son invariantes boost los vectores cinemáticos del momento $\vec{p} = m\vec{v}$, el momento orbital angular $\vec{j} = m(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}$ y el vector centro de movimiento $\vec{k} = \vec{p}t - m\vec{x}$, siendo m una constante que más adelante identificaremos con la masa inercial

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= m\vec{v}' = m\vec{v} + m\vec{v}_0 = \vec{p} + m\vec{v}_0 \\ \vec{j}' &= (\vec{x}' - \vec{x}'_0) \wedge \vec{p}' = m(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{p}' = \vec{j} + m(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_0 \\ \vec{k}' &= \vec{p}'t' - m\vec{x}' = \vec{k} + m\vec{v}_0 t_0 \end{aligned}$$

Si la velocidad $\vec{v}$ es constante, las derivadas respecto al tiempo de los vectores cinemáticos se anulan y si son invariantes frente a una transformación boost galileana, por lo que se conservan

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}'}{dt'} \equiv 0 \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt'} \equiv 0 \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt'} \equiv 0$$

Veremos que esto tiene importantes consecuencias para la mecánica clásica

Veremos más adelante que se puede definir como sistema inercial aquellos en que los vectores cinemáticos se conservan y no varían con el tiempo.

Las transformaciones boost son compatibles con el principio de inercia que establece que una partícula aislada permanecerá en reposo o con movimientos uniforme respecto a todo sistema inercial

Isometría 10-paramétrica de las 6 g-transformaciones galileanas y los principios de conservación

Las 6 transformaciones euclídea que comprende los grupos de las traslaciones espaciales $\bar{T}_e$, las rotaciones $\bar{R}$, las traslaciones temporales $\bar{T}_t$, más la transformación boost de movimiento relativo $\bar{B}_v$, dependen de un total de 10 parámetros continuos $\vec{a}, \vec{n}\theta, t_0, \vec{v}_0$. La traslación temporal como cambio en el tiempo está ligada a la dinámica, mientras las restantes 9 transformaciones son cinemáticas.

La inversión temporal $\bar{T}_t$, y las inversiones $\bar{P}$ son transformaciones discretas, y que los sistemas dinámicos cumplen bajo ciertas restricciones.

Si considerar la transformación boost de movimiento relativo $\vec{v}_0 \equiv 0$, entonces se tiene el grupo de transformaciones euclidianas con la métrica del espacio plano homogéneo e isótropo.

Como la isometría de galileo depende de 10 parámetros, a parte de los vectores $\vec{p}, \vec{l}, \vec{k}$ para una partícula aislada se puede formar otro escalar conservativo

$$E_c = \frac{m}{2} \vec{v}^2$$

ya que verifica

$$0 \equiv \frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_c}{dt}$$

y que se identifica con la energía cinética de una partícula libre en mecánica clásica.

Estas son todas las magnitudes conservativas que se pueden formar y que son invariantes ante la isometría galilaena, teniendo en cuenta la isotropía y la homogeneidad del espacio y del tiempo. A partir de ellas, y con las hipótesis de que sus magnitudes asociadas una partícula son proporcionales a su masa, y de que son magnitudes aditivas cuya cantidad total se conserva, se puede construir toda la mecánica de Newton.

La hipótesis fundamental de la mecánica clásica, es que la materia viene caracterizada solo por la masa, que es magnitud extensiva aditiva, y es una propiedad intrínseca

inalterable. Cuando existen varios cuerpos, las magnitudes $m, \vec{p}, \vec{j}, \vec{k}, E_c$ se suman, por lo que nos referiremos a ellas como la cantidad total de toda la materia presente

$$m = \Sigma m_r$$

$$\vec{p} = \Sigma \vec{p}_r = \Sigma m_r \vec{v}_r$$

$$\vec{j} = \Sigma (\vec{x}_r - \vec{x}_0) \wedge \vec{p}_r = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\vec{k} = \Sigma (\vec{p}_r t - m_r \vec{x}_r) = \vec{p} t - m \vec{x}_c$$

$$E_c = \frac{1}{2} \Sigma m_r v_r^2$$

Donde se ha definido el centro de masas del conjunto de partículas como

$$\vec{x}_c = \frac{\Sigma m_r \vec{x}_r}{\Sigma m_r}$$

el momento cinético $\vec{l}$ del centro de masas $\vec{x}_c$ respecto a $\vec{x}_0$

$$\vec{l} = \Sigma (\vec{x}_c - \vec{x}_0) \wedge \vec{p}$$

y el momento orbital $\vec{s}$ de las partículas respecto al centro de gravedad

$$\vec{s} = \Sigma (\vec{x}_r - \vec{x}_c) \wedge \vec{p}$$

Las magnitudes anteriores totales se conservan $\vec{p}, \vec{j}, \vec{k}, E_c$ tienen una interpretación que se relaciona con los operadores que generan las traslaciones $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}$, las rotaciones $\theta \vec{n} \cdot (\vec{x} \wedge \frac{\partial}{\partial \vec{x}})$, y las traslaciones en el tiempo $t_0 \partial / \partial t$.

Para un sistema de partículas aislado, existe un campo escalar $L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)$ que es invariante galileano $L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)$, ante una traslación infinitesimal $\Delta \vec{a}$ en el espacio, una rotación $\Delta \vec{\omega} = \Delta \theta \vec{n}$, una transformación boost $\vec{v}_0$, y una traslación en el tiempo, verificándose

$$0 \equiv L(\vec{x}_r + \Delta \vec{a}, \vec{v}_r, t) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = \Delta \vec{a} \cdot \Sigma \vec{\nabla}_r L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)$$

$$0 \equiv L(\vec{x}_r + \Delta \theta \vec{n} \wedge \vec{x}_r, \vec{v}_r, t) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = \Delta \theta \vec{n} \cdot \Sigma \vec{x}_r \wedge \vec{\nabla}_r L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)$$

$$0 \equiv L(\vec{x}_r + \Delta \vec{v}_0 t, \vec{v}_r, t) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = t \Delta \vec{v}_0 \cdot \Sigma \vec{\nabla}_r L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)$$

$$0 \equiv L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t + \Delta t_0) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = \Delta t_0 \partial_t L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)$$

A un campo escalar con estas propiedades se le denomina habitualmente como lagrangiana.

Para que estas relaciones de identidad de invarianza se cumplan para las 10 G -transformaciones galileanas, se deben verificar las relaciones de compatibilidad

$$\vec{p}_r = \frac{\partial L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)}{\partial \vec{v}_r} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}_r L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = \frac{d \vec{p}_r}{dt}$$

Los significados del campo electromagnético

como se puede como se puede comprobar directamente, ya que será

$$\delta L = 0$$

como consecuencia de la conservación de las magnitudes cinéticas $m, \vec{p}, \vec{j}, \vec{k}, E_c$ ante las transformaciones galileanas

La conservación del momento $\vec{p}$ total está asociada a la invarianza de L en una traslación espacial.

$$L(\vec{x}_r + \Delta \vec{a}, \vec{v}_r, t) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = \Delta \vec{a} \cdot \Sigma \vec{\nabla}_r L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = \Delta \vec{a} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv 0$$

La conservación de la proyección del momento angular total en una dirección está asociada la invarianza de una rotación en esa dirección.

$$\begin{aligned} L(\vec{x}_r + \Delta \theta \vec{n} \wedge \vec{x}_r, \vec{v}_r, t) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) &= \Delta \theta \vec{n} \cdot \Sigma (\vec{x}_r \wedge \vec{\nabla}_r L) = \Delta \theta \vec{n} \cdot \Sigma \left(\vec{x}_r \wedge \frac{d\vec{p}_r}{dt} \right) \\ &= \Delta \theta \vec{n} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \equiv 0 \end{aligned}$$

La conservación del movimiento del centro de masas está asociada a una transformación boost de desplazamiento relativo.

$$\begin{aligned} L(\vec{x}_r + \Delta \vec{v}_0 t, \vec{v}_r, t) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) &= t \Delta \vec{v}_0 \cdot \Sigma \vec{\nabla}_r L = t \Delta \vec{v}_0 \cdot \Sigma \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_r} = t \Delta \vec{v}_0 \cdot \Sigma \frac{d\vec{p}_r}{dt} \\ &= \Delta \vec{v}_0 \cdot \frac{d}{dt} \Sigma (\vec{p}_r t - m_r \vec{x}_r) = \Delta \vec{v}_0 \cdot \frac{d}{dt} (\vec{p} t - m \vec{x}_c) = \Delta \vec{v}_0 \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \equiv 0 \end{aligned}$$

De la traslación en el tiempo se obtiene

$$\begin{aligned} L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t + \Delta t_0) - L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) &= \Delta t_0 \frac{\partial L}{\partial t} = \Delta t_0 \left(\frac{dL}{dt} - \Sigma \vec{v}_r \cdot \vec{\nabla}_r L - \Sigma \frac{d\vec{v}_r}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_r} \right) \\ &= \Delta t_0 \left(\frac{dL}{dt} - \Sigma \vec{v}_r \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_r} - \Sigma \frac{d\vec{v}_r}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_r} \right) = -\Delta t_0 \frac{d}{dt} \left(\Sigma \vec{v}_r \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_r} - L \right) \\ &= -\Delta t_0 \frac{d}{dt} (\Sigma \vec{v}_r \cdot \vec{p}_r - L) = -\Delta t_0 \frac{d}{dt} (2E_c - L) = -\frac{dE}{dt} \equiv 0 \end{aligned}$$

Esta condición implica que para un sistema aislado L no depende del tiempo. Además vemos que se conserva la magnitud

$$E = 2E_c - L$$

que más adelante asociaremos con la energía total de un sistema mecánico aislado, si las partículas interactúan entre ellas.

Si el sistema de partículas no interaccionan entre sí, de las condiciones de compatibilidad se ve que la función $L = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = E_c$ satisface las condiciones exigidas, por lo que será en este caso $E = E_c$.

La invarianza covariante de las ecuaciones locales de la física respecto a los 10 parámetros de las transformaciones de isometría galileana $\vec{a}, \vec{n}, \theta, t_0, \vec{v}_0$ dan lugar a la conservación del momento $\vec{p}$, del momento angular $\vec{J}$ y de la energía E , y del movimiento del centro de masas en un sistema aislado $\vec{k}$.

Principio de inercia de Galileo y mecánica de Newton

Se puede definir como sistema inercial aquél en que las magnitudes $\vec{p}, \vec{J}, \vec{k}, E$ de un sistema aislado se conservan y no varían con el tiempo en ausencia de fuerzas externas.

El principio de inercia de Galileo, establece que en todo sistema inercial, un cuerpo material en reposo ($\vec{p} = 0$) permanece en su estado de reposo, o en movimiento uniforme ($\vec{p} = \text{constante}$) en línea recta, excepto si es sometido a una fuerza que cambia su estado de movimiento. Esta formulación expresa también la primera ley de Newton para la mecánica, basada en las observaciones de Galileo.

El principio de inercia, está contenido en la invarianza ante una transformación boost. Sin embargo, ambos son un postulado experimental adicional a la geometría euclídea.

Si en un sistema inercial el momento no es constante, entonces se define la fuerza $\vec{F}$ como la variación del momento por unidad de tiempo

$$\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Esta definición es el núcleo de la segunda ley de Newton para la mecánica.

Aunque $\vec{p}$ no es un invariante ante las transformaciones boost de Galileo, sin embargo si lo es su variación respecto al tiempo, y por tanto $\vec{F}$ también es un vector invariante galileano

A la constante de proporcionalidad entre $\vec{p}$ y la velocidad $\vec{v}$, se le denomina masa inercial, y es un invariante extensivo (aditivo) y conservativo. La masa inercial en la mecánica clásica, es una propiedad aditiva intrínseca de la materia que se conserva siempre.

En la mecánica de Newton la masa y el momento son las propiedades cinemáticas que caracterizan a la materia, y junto con las fuerzas determinan su dinámica.

En sistemas conservativos invariantes ante las transformaciones galileanas será $\vec{v} \wedge \vec{F} \equiv 0$, lo que implica

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv -\vec{\nabla}V$$

donde V es una función de potencial.

En el caso de que existan varias partículas con masa, para que se conserve la invarianza ante la isometría de Galileo, el potencial V solo puede ser una función de la distancia relativa entre ellas. Por esto, las interacciones mecánicas serán centrales e instantáneas.

La tercera ley de Newton, de que a cada fuerza sobre un cuerpo, se opone una fuerza de reacción igual y de signo contrario, es solo una consecuencia directa de los principios de conservación de la isometría galileana para un sistema mecánico cerrado.

De acuerdo con esto, la fuerza mecánica entre dos partículas i y j deberá ser de tipo central y la fuerza estará dirigida en la línea de unión de los cuerpos.

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

Se debe observar, que la diferencia de coordenadas se toma siempre en un mismo instante de tiempo, lo que implica de forma inmediata la covarianza por inversión temporal.

Para dos partículas que interactúan mecánicamente, de la conservación del momento total se deduce la tercera ley de Newton

$$0 \equiv \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \Rightarrow \vec{F}_{12} \equiv -\vec{F}_{21}$$

De la conservación del momento angular, se deduce que la línea de fuerza tiene que estar en la línea de unión de los cuerpos

$$0 \equiv \frac{d}{dt}(\vec{J}_1 + \vec{J}_2) = (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \wedge \vec{F}_{12} + (\vec{x}_2 - \vec{x}_0) \wedge \vec{F}_{21} \Rightarrow (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \wedge \vec{F}_{12} \equiv 0$$

Por tanto, las leyes de Newton son una consecuencia de los principios de conservación que se derivan de las invarianzas de las transformaciones galileanas.

De la conservación del centro de masas, se deduce que dinámicamente todas las masas se pueden considerar concentradas en el centro de gravedad $\vec{X}_c$ sobre el que actúan todas las fuerzas externas

$$\vec{k} = \vec{p}_1 t - m_1 \vec{x}_1 + \vec{p}_2 t - m_2 \vec{x}_2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)t - (m_1 + m_2)\vec{x}_c = \vec{p}t + m\vec{x}_c$$

donde $\vec{x}_c$ es el centro de masas

$$\vec{x}_c = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

En presencia de fuerzas externas

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_{ext}$$

Además como

$$\frac{d\vec{x}_c}{dt} = \frac{\vec{p}}{m} \Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}_c}{dt^2} = \vec{F}_{ext}$$

Es decir, el centro de masa se comporta como un partícula de masa m sobre la que actúan la resultante de las fuerzas externas.

Cuando hay varias partículas, es conveniente descomponer el momento angular total $\vec{j}$, en la suma del momento angular orbital $\vec{l}$ de todas las masas concentradas en el centro de gravedad, y el momento angular de spin $\vec{s}$ de todas las masas alrededor de centro de gravedad

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\vec{l} = (m_1 + m_2)(\vec{x}_c - \vec{x}_0) \wedge \frac{d\vec{x}_c}{dt}$$

$$\vec{s} = (\vec{x}_1 - \vec{x}_c) \wedge \vec{p}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_c) \wedge \vec{p}_2$$

El momento orbital o espín $\vec{s}$, aunque es un vector invariante ante las transformaciones de la isometría galileana, sin embargo no es una magnitud que se conserve en el tiempo. Sin embargo, la helicidad h definida como la proyección del momento angular $\vec{j}$ sobre el momento $\vec{p}$, sí es un vector conservativo, aunque no es invariante ante las transformaciones galileanas.

$$h \equiv \vec{j} \cdot \vec{p} = \vec{s} \cdot \vec{p} \Rightarrow \frac{dh}{dt} \equiv 0$$

A la magnitud extensiva, $E = E_c + V$ se le designa como la energía total del sistema mecánico. La aditividad de E , procede de la aditividad de $m, \vec{p}, \vec{l}, \vec{k}, E_c$ para cada una de las partes que constituyen un sistema mecánico. Sin embargo, se debe observar que la función potencial de un sistema mecánico, presupone una interacción no local que actúa instantáneamente a distancia. Por ello, en la mecánica clásica no es posible localizar la energía potencial en ninguna posición concreta del espacio.

La energía mecánica total E es un invariante galileano que se conserva en el tiempo cuando el potencial es invariante ante una traslación en el tiempo, ya que

$$\delta E = \Delta t_0 \frac{dE}{dt} = \Delta t_0 \left(\Sigma m_r \vec{v}_r \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \Sigma \vec{v}_r \cdot \vec{\nabla}_r V + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta t_0 \frac{\partial V}{\partial t} \equiv 0$$

De igual forma, se demuestra que para un sistema mecánico aislado cuyas partes interactúan a través de un potencial, se conservará el momento total $\vec{p}$ en una dirección $\vec{a}$, la proyección del momento cinético orbital $\vec{l}$ en una dirección $\vec{n}$, y la proyección del centro de masas $\vec{k}$ en la dirección $\vec{v}$, si el potencial V es invariante ante las traslaciones espaciales en la dirección $\vec{a}$, a las rotaciones respecto al eje $\vec{n}$, y a las transformaciones boost en la dirección $\vec{v}_0$.

Con los anteriores supuestos, es fácil comprobar que la función de campo L compatible con la invarianza ante las $\mathcal{G}$ -transformaciones galileanas se puede escribir como

$$L = E_c - V$$

que se conoce también como función de Lagrange, y que determina toda la dinámica de las partículas, ya que su ecuación de movimiento viene dada por

$$\vec{F}_r = \frac{d\vec{p}_r}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t)}{\partial \vec{v}_r} = \vec{\nabla}_r L(\vec{x}_r, \vec{v}_r, t) = -\vec{\nabla}_r V$$

Principio de la covarianza galileana y simultaneidad en el tiempo

El principio de la covarianza galileana establece que todas las leyes de la física deben tener la misma en todos los sistemas de coordenadas relacionados por una transformación galileana.

La hipótesis de la covarianza galileana, restringe la forma de las ecuaciones físicas posibles, ya que a parte de la simultaneidad absoluta $|\Delta t'| = |\Delta t|$, se verifica que ante una transformación boost las longitudes entre coordenadas no se mantienen al ser $|\Delta \vec{x}'| = |\Delta \vec{x}| \pm \vec{v}_0 \Delta t$, aunque si es invariante la relación entre dos vectores al ser $\Delta \vec{x}'_1 - \Delta \vec{x}'_2 = \Delta \vec{x}_1 - \Delta \vec{x}_2$. Solo tiene sentido el concepto de longitud propia $|\Delta \vec{x}'| = |\Delta \vec{x}|$ cuando se mide de forma simultánea $\Delta t = 0$ en ambos extremos. La derivada respecto al tiempo de una función $\partial \phi / \partial t$ hemos visto que tampoco es un invariante galileano, ya que se transforma como $\partial \phi' / \partial t' = \partial \phi / \partial t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi$.

La covarianza ante el grupo de transformaciones infinitesimales euclidianas y galileanas nos lleva a que las ecuaciones en física sean en derivadas parciales locales. Los únicos operadores que tienen covarianza euclidiana son el gradiente, rotacional,

divergencia, el laplaciano, junto con el producto escalar y vectorial, y las distancias relativas como diferencia entre posiciones medidas en el mismo instante de tiempo. Por esta razón, las leyes matemáticas de la física clásica son locales y se expresan mediante relaciones entre dichos operadores. La covarianza galileana se incorpora de forma natural mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden en el tiempo, que son las que obedecen la dinámica de Newton, ya que la aceleración como variación de la velocidad es un invariante galileano. La primera derivada en el tiempo solo puede aparecer en las ecuaciones dinámicas si es contrarrestado con otros términos para preservar la covarianza de la transformación galileana.

Principio de inercia de y mecánica de analítica de Leibniz

La mecánica de Newton se basa en el concepto partículas dotadas de masa y momento, y de fuerzas que actúan sobre ellas, que no siempre son fácilmente conocidas.

Leibniz en cambio asume que la energía cinética es el atributo esencial de la materia, y que es el trabajo realizado por las fuerzas lo que determina la dinámica. Sobre este esquema Lagrange d'Alambert y Hamilton construyeron las bases de la mecánica analítica, en que los sistemas se pueden analizar los sistemas de forma integral en función solo de las fuerzas externas, y pudiendo sustituir las fuerzas internas por constricciones cinemáticas.

Esta idea fue fructífera, pues llevó a formular las condiciones de equilibrio de la estática, como aquella en que el trabajo realizado por las fuerzas externas en un desplazamiento virtual compatible con las constricciones es nulo, lo que es también conocido como el principio de los trabajos virtuales. Generalizando esta idea, el principio de d'Alambert establece que el trabajo virtual de la fuerza de inercia $-m\ddot{x}$ más el de las fuerzas externas es nulo. Este principio reduce el problema de la dinámica a la estática, en que las fuerza de inercia deben estar en equilibrio con las otras fuerzas externas. Esto implica que el trabajo virtual de las fuerzas internas o de reacciones en un desplazamiento virtual compatible con las constricciones no contribuyen y puedan tratarse los sistemas de forma integral.

El principio de d'Alambert establece entonces que el trabajo virtual δW en un desplazamiento virtual $\delta \vec{x}$ compatible con las constricciones debe ser nulo

$$\delta W = \sum (\vec{F}_r + (-m_r \ddot{\vec{x}}_r)) \cdot \delta \vec{x}_r = 0$$

Este principio es invariante ante las transformaciones de la isometría galileana, por que establece una condición de equilibrio que es invariante en todos sistemas de inercia.

El trabajo virtual no es una diferencial exacta δW si $\vec{F}_r \cdot \delta \vec{x}_r$ no lo es, como es en el caso de que actúen fuerzas disipativas. Sin embargo, en determinadas circunstancias, si el trabajo las fuerzas es una diferencial exacta entonces,

$$\delta W = dW = \Sigma(\vec{F}_r \cdot \delta \vec{x}_r - m_r \vec{a}_r \cdot \delta \vec{x}_r) = -\Sigma \left(\vec{\nabla}_r V + \frac{d\vec{p}_r}{dt} \right) \cdot d\vec{x}_r = 0$$

lo que implica

$$\frac{d\vec{p}_r}{dt} = -\vec{\nabla}_r V$$

En este último caso, se verificará también la conservación de la energía

$$dW = -dV - dE_c = 0$$

es decir, la energía total definida como la suma de la energía cinética más la potencial es constante en el tiempo

$$E = E_c + V = C^{te}$$

En el caso de la estática, vemos que la condición de equilibrio respecto a una variación virtual compatible con las constricciones viene dada por la condición extremal

$$dV = 0$$

que está en general asociada a la configuración del sistema de mínima energía potencia.

El paso a la mecánica variacional, fue dado integrando el trabajo virtual entre dos tiempos fijos obteniéndose

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} (E_c - V) dt - [\Sigma m_r \vec{v}_r \cdot \delta \vec{x}_r]_{t_1}^{t_2}$$

Si la variación de $\delta \vec{x}_r$ se anula tiempo extremos, se obtiene el principio variacional de de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Habitualmente se denomina la acción a

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

El principio de mínima acción se formula como que la trayectoria real de un sistema es aquella que hace la acción sea estacionaria para una condiciones iniciales y finales fijadas. Por su construcción vemos que este principio es invariante ante las transformaciones galileanas.

Sin embargo no debe olvidarse, que detrás de este principio está el principio de los trabajos virtuales, ya es aplicable en condiciones más generales en que las fuerzas no son derivables de un potencial.

Transformaciones activas y pasivas en la dinámica

Se debe distinguir entre transformaciones activas y pasivas. Una transformación es activa cuando se actúa directamente sobre un objeto manteniendo fijos los ejes coordenados del sistema de referencia.

Una transformación es pasiva, cuando la transformación se aplica sobre los ejes de coordenadas, y por tanto implica un cambio de sistema de referencia, dejando los objetos inalterados.

Aunque matemáticamente las transformaciones activas y pasivas son la inversa una de la otra, sin embargo, se debe tener en cuenta que representa operaciones físicas diferentes.

Los sistemas clásicos no siempre se describen por ecuaciones que son invariantes ante las transformaciones de Galileo. Por ello, las transformaciones activas y pasivas no son equivalentes, y además, las transformaciones activas nos pueden llevar en esos casos a un nuevo estado físico diferente del inicial, y las pasivas incluso a un estado sin sentido físico real.

$\mathcal{L}$ -Transformaciones de Lorentz, $\mathcal{P}$ -Transformaciones de Poincaré y el principio de causalidad

La condición de simultaneidad absoluta $|\Delta t^| = |\Delta t|$ de las transformaciones galileanas, implica la existencia de un tiempo absoluto, y que las interacciones se propaguen instantáneamente y tengan un carácter no local, lo que está en contradicción con el principio de la causalidad. También el principio de invarianza galileana, implica la existencia de un espacio absoluto, en que solo las medidas de distancia realizadas simultáneamente son invariantes boost. Así mismo, el principio de d'Alambert para la dinámica exige un sistema de referencia absoluto en el que medir las aceleraciones de las fuerzas de inercia. Todo esto que ha suscitado grandes controversias filosóficas, y obligó a revisar el principio de invarianza galileana.*

Los significados del campo electromagnético

Por ello, es conveniente analizar cuáles son las transformaciones más generales $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x}, t)$ y $t \rightarrow t' = t'(\vec{x}, t)$, que cumplen con el grupo de transformaciones euclídea, y también un forman grupo con las trasformaciones boost entre dos sistemas de referencia que se mueven con velocidad relativa uniforme.

De la isotropía y homogeneidad de las coordenadas espaciales y temporal, se deduce que estas trasformaciones deben se lineales respecto a ellas. Si además deben formar grupo para las transformaciones boost v_0 en una dirección que tomaremos como eje x , la expresión más general admisible será entonces para una transformación pasiva de cambio de ejes de coordenadas será

$$\Delta t' = \gamma(v_0)(\Delta t - \alpha v_0 \Delta x)$$

$$\Delta x' = \gamma(v_0)(\Delta x - v_0 \Delta t)$$

$$\Delta y' = 0$$

$$\Delta z' = 0$$

Una transformación activa, manteniendo fijos los ejes coordenados, será la transformación anterior cambiando $\vec{v}_0$ por $-\vec{v}_0$.

Este tipo de transformaciones se denominan también como transformaciones boost relativista, y matemáticamente se pueden interpretar como una rotación hiperbólica en el plano de coordenadas (x, t) con ángulo imaginario

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cos(i\theta) - x \sin(i\theta) = ct \cosh(\theta) - x \sinh(\theta) \\ x' &= -ct \sin(i\theta) + x \cos(i\theta) = -ct \sinh(\theta) + x \cosh(\theta) \end{aligned}$$

siendo

$$\cosh(\theta) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Para que se verifique el principio de causalidad, α debe ser una constante positiva con dimensiones del inverso del cuadrado de velocidad, y

$$\gamma(v_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha v_0^2}}$$

Entonces, entre ambos sistemas las velocidades se transformarán como

$$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{v - v_0}{1 - \alpha v v_0}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v' + v_0}{1 + \alpha v' v_0}$$

Este tipo de transformaciones boost, junto con el grupo de rotaciones propias, se denominan grupo propio de transformaciones relativistas de Lorentz, y fue Poincaré quien primero observó que dejaban inalteradas la forma de las ecuaciones de Maxwell, cuando se ponía

$$\alpha = \frac{1}{c^2}$$

donde c es la velocidad de la luz.

De las ecuaciones de transformación boost relativista, se deduce también que c es la máxima velocidad alcanzable.

Muchas veces, también es habitual a la transformación boost relativista entre las coordenadas espacial y temporal denominarla simplemente como transformación de Lorentz.

Cuando las velocidades v y v_0 son pequeñas respecto a c , se reproduce las transformaciones boost galileana para el movimiento relativo entre dos sistemas inerciales.

Las transformaciones de Lorentz preservan el principio de causalidad, ya que dos sucesos que ocurran en dos puntos separados $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ en distintos instantes $t_2 > t_1$, ocurrirán en las posiciones transformadas $\vec{x}'_1$ y $\vec{x}'_2$ manteniendo su orden cronológico $t'_2 > t'_1$, siempre que estén causalmente conectados con la condición $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < c(t_2 - t_1)$. Por tanto, c además de ser la velocidad cinemática máxima alcanzable, es también la velocidad máxima con que se puede transmitir las interacciones mecánicas.

Cuando al grupo de Lorentz se le añade el grupo de translaciones espaciales y temporal, se forma el grupo denominado de transformaciones restringido de Poincaré.

Se ha observado que todas las leyes físicas de la naturaleza son invariantes ante las transformaciones del grupo restringido de Poincaré, lo que se conoce como principio de Poincaré.

Actualmente se considera al campo electromagnético como una representación del grupo restringido del grupo de Poincaré $SO(1,3)$ de un campo nulo de espín 1.

Espacio de Minkowski

En la teoría de la relatividad, las coordenadas espaciales y temporales tienen la misma relevancia, y están relacionadas entre ellas a través de las transformaciones de Lorentz.

Se define el espacio de Minkowsky, como un espacio vectorial cuadrimensional con las tres coordenadas espaciales y una temporal con producto interno escalar definido. Las coordenadas en dicho espacio se representan con las siguientes notaciones equivalentes

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (x^0, x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} (ct, x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} (ct, \vec{x})$$

El producto interno escalar viene determinado por el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ que es el que define la forma fundamental $d\bar{s}$ de la métrica del espacio de Minkowski, y por tanto, las propiedades geométricas intrínsecas de las curvas y superficies en el espacio de Minkowski. La distancia entre dos puntos próximos $\bar{x}$ y $\bar{x} + d\bar{x}$, o lo que lo mismo la norma del vector $\bar{x}$ en el espacio de Minkowski viene dada por la generalización del teorema de Pitágoras.

$$d\bar{s}^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2$$

$d\bar{s}$ es un invariante fundamental de las transformaciones de Poincaré, que procede de que la luz se propaga con igual velocidad en todos los sistemas inerciales para preservar el principio de causalidad.

El espacio de Minkowski es una forma natural para representar los sucesos (x^α) de acuerdo con la relatividad general determinada por el grupo de transformaciones de Poincaré. Cuando las leyes naturales tienen una representación matemática en el espacio de Minkowski que sea invariante ante transformaciones de Poincaré, se dice que tienen una formulación covariante.

$d\bar{s}$ aunque es un invariante, no es una diferencial exacta, ya que su integral entre dos puntos del espacio de Minkowski depende de la trayectoria que une dichos puntos. Teniendo esto en cuenta, habitualmente representaremos a $d\bar{s}$ simplemente como ds para simplificar la notación.

Un cuadrivector contravariante $\bar{\Lambda}$ vendrá definido por cuatro componentes, una temporal y tres espaciales

$$\bar{\Lambda} \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, \Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, \vec{\Lambda})$$

Su vector covariante se define por

$$\Lambda_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, -\Lambda^1, -\Lambda^2, -\Lambda^3) \stackrel{\text{def}}{=} (\Lambda^0, -\vec{\Lambda})$$

siendo $g_{\alpha\beta}$ la matriz diagonal

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Con el superíndice en griego $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ nos referiremos de forma genérica a una de las cuatro componentes de espacio de Minkowski.

Con el índice latino $i = 1, 2, 3$ nos referiremos solo a las componentes espaciales.

El producto escalar de dos cuadvectores $\vec{A}$ y $\vec{K}$ se define por

$$\vec{A} \cdot \vec{K} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta} A^\alpha K^\beta \stackrel{\text{def}}{=} A^0 K^0 - A^1 K^1 - A^2 K^2 - A^3 K^3$$

Una transformación pasiva boost de Lorentz en la dirección del eje x , viene representada por

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \mathcal{L}^\alpha_{\beta'} x^{\beta'} \\ x^{\alpha'} &= \mathcal{L}^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{L}$ la matriz de Lorentz

$$\mathcal{L}^{\alpha'}_{\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}} \equiv (\mathcal{L}^{\beta'}_{\alpha})^{-1}$$

O de forma explícita

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &= \gamma \left(\Lambda^0 - \frac{v}{c} \Lambda^1 \right) \\ \Lambda^1 &= \gamma \left(\Lambda^1 - \frac{v}{c} \Lambda^0 \right) \\ \Lambda^2 &= \Lambda^2 \quad \Lambda^3 = \Lambda^3 \end{aligned}$$

En el caso de que la velocidad tenga una dirección $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ arbitraria, las ecuaciones de transformación vendrán dadas por la matriz

$$\mathcal{L}^{\alpha'}_{\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v_j}{c} \\ -\gamma \frac{v^i}{c} & 1 + \frac{(\gamma - 1) v^i v_j}{c^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & 1 + \frac{(\gamma - 1) \vec{\beta} \vec{\beta}^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

En forma explícita las relaciones de transformación toman la expresión

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &= \gamma (\Lambda^0 - \vec{\Lambda} \cdot \vec{\beta}) \\ \vec{\Lambda}' &= \vec{\Lambda} + \frac{(\gamma - 1) \vec{\Lambda} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \vec{\beta} - \gamma \Lambda^0 \vec{\beta} \end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones se pueden expresar de una forma general mediante

$$\Lambda^0 = \gamma \left(\Lambda^0 - \frac{v}{c} \Lambda_{\parallel} \right)$$

$$\Lambda_{\parallel} = \gamma \left(\Lambda_{\parallel} - \frac{v}{c} \Lambda^0 \right)$$

$$\Lambda_{\perp} = \Lambda_{\perp}$$

Donde $\Lambda_{\parallel}$ y $\Lambda_{\perp}$ son las proyecciones en la dirección paralela y perpendicular a $\vec{v}$.

Muchas veces se representa $\mathcal{L}_{\beta}^{\alpha}$ simplemente como $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta}$. No hay confusión, puesto que hemos mantenido el origen de los sistemas de coordenadas marcando los subíndices con prima y sin prima. Mantenemos el punto de vista de transformaciones de Lorentz pasivas que corresponde a un cambio del sistema de referencia.

Evidentemente se verifican las siguientes relaciones de ortogonalidad para mantener invariante la norma de los cuadvectores en las transformaciones de Lorentz

$$g_M^{\alpha\beta} \mathcal{L}^{\alpha}_{\alpha'} \mathcal{L}^{\beta'}_{\beta} = g_M^{\alpha\beta} \quad g_{M\alpha\beta} \mathcal{L}^{\alpha}_{\alpha'} \mathcal{L}^{\beta'}_{\beta} = g_{M\alpha\beta}$$

donde $g_M^{\alpha\beta}$ es la matriz inversa de $g_{M\alpha\beta}$ que en el caso del espacio de Minkowski son iguales. Las anteriores igualdades se pueden escribir también como

$$\bar{\mathcal{L}} \bar{\mathcal{L}} = \bar{g}$$

Por tanto, el determinante de la matriz boost de Lorentz propia es la unidad $|\bar{\mathcal{L}}| = 1$. Sin embargo $\bar{g} \bar{\mathcal{L}}$ si es una matriz simétrica unitaria y ortogonal

$$(\bar{g} \bar{\mathcal{L}})^T = (\bar{g} \bar{\mathcal{L}})^{-1} = I$$

Transformaciones covariantes y principio de la covarianza

El principio de la relatividad establece que si S y S' son dos sistemas equivalentes, cualquier relación funcional F entre magnitudes físicas $\phi_{\beta}^{\alpha}, \dots$, que expresa una ley de la naturaleza, tienen la misma forma invariante (covariante) en ambos sistemas cuando se hace la transformación de uno a otro $S \leftrightarrow S'$

$$F(\phi_{\beta}^{\alpha}, \dots, \partial_{\mu} \phi_{\beta}^{\alpha}, \dots) = 0 \text{ en } S \text{ y } F(\phi_{\beta'}^{\alpha'}, \dots, \partial_{\mu'} \phi_{\beta'}^{\alpha'}, \dots) = 0 \text{ en } S'$$

Las leyes de la física se expresan de forma natural de forma tensorial. El teorema fundamental de los tensores, establece que si una relación tensorial se anula en un sistema de coordenadas, entonces se anulará al pasar tensorialmente a otro sistema de coordenadas equivalente.

Para aclarar que significa la invarianza de la forma covariante, supongamos que hacemos una transformación general de coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^\beta) \quad \text{o} \quad x^{\alpha'} \rightarrow x^\alpha = g^\alpha(x^{\beta'})$$

Se verificara entonces

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} dx^\beta \equiv \frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial x^\beta} dx^\beta \equiv \Lambda^{\alpha'}_{\beta} dx^\beta \quad \text{y}$$

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} dx^{\beta'} \equiv \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^{\beta'}} dx^{\beta'} \equiv \Lambda^\alpha_{\beta'} dx^{\beta'}$$

Definiéndose

$$\Lambda^\alpha_{\beta} \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} \quad \text{y} \quad \Lambda^{\alpha'}_{\beta'} \equiv \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta''}} = (\Lambda^\alpha_{\beta'})^{-1}$$

ya que se verifica

$$\Lambda^\alpha_{\mu} \Lambda^\mu_{\beta} \equiv \delta^\alpha_{\beta} \quad \text{y} \quad \Lambda^{\mu'}_{\beta'} \Lambda^{\beta'}_{\mu} \equiv \delta^{\mu'}_{\mu}$$

Si una ecuación que representa una ley física viene representada por una expresión tensorial de la forma

$$F(\phi^\alpha_{\beta}, \dots, \partial_\mu \phi^\alpha_{\beta}, \dots) = 0$$

entonces, el principio de la covarianza establece que su forma funcional se mantiene cuando se hace una transformación tensorial covariante

$$F(\phi^{\alpha'}_{\beta'}, \dots, \partial_{\mu'} \phi^{\alpha'}_{\beta'}, \dots) = 0$$

siendo la relación de transformación de las magnitudes tensoriales

$$\phi^{\alpha'}_{\beta'}(x^{\kappa'}) = \Lambda^{\sigma}_{\beta'} \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \phi^\sigma_{\gamma}(x^\kappa) \quad \text{y} \quad \partial_{\mu'} \phi^{\alpha'}_{\beta'}(x^{\kappa'}) = \Lambda^{\rho}_{\mu'} \Lambda^{\sigma}_{\beta'} \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \partial_\rho \phi^\sigma_{\gamma}(x^\kappa)$$

Por $\phi^{\alpha'}(x^{\kappa'})$ se indica que la forma de dependencia funcional respecto a $x^{\alpha'}$ después de la transformación puede ser distinta que la de $\phi(x^\kappa)$ respecto a x^κ .

Las transformaciones discretas de paridad e inversión temporal las podemos representar mediante las matrices diagonales

$$\bar{\mathcal{P}} \equiv \mathcal{P}^{\alpha'}_{\beta} = \text{diag}(1, 1, -1, -1) \quad \text{y}$$

$$\bar{\mathcal{T}} \equiv \mathcal{T}^{\alpha'}_{\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Transformaciones de Lorentz infinitesimales y sus generadores

Una transformación infinitesimal de propia de Lorentz se puede representar de la forma

$$\Delta \bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}} - \Delta \bar{\omega} \quad \text{o} \quad x^{\alpha'} = \Delta \mathcal{L}^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} = (\delta^{\alpha}_{\beta} - \Delta \omega^{\alpha}_{\beta}) x^{\beta}$$

Puesto que se debe verificar

$$\begin{aligned} g^{\alpha'\beta'} &= \Delta \mathcal{L}^{\alpha'}_{\alpha} \Delta \mathcal{L}^{\beta'}_{\beta} g^{\alpha\beta} = (\delta^{\alpha'}_{\alpha} - \Delta \omega^{\alpha'}_{\alpha}) (\delta^{\beta'}_{\beta} - \Delta \omega^{\beta'}_{\beta}) g^{\alpha\beta} \\ &= g^{\alpha'\beta'} - (g^{\alpha'\beta} \Delta \omega^{\beta}_{\alpha'} + g^{\alpha\beta'} \Delta \omega^{\alpha}_{\beta'}) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\Delta \omega^{\beta'\alpha'} = -\Delta \omega^{\alpha'\beta'} \quad \text{o} \quad \Delta \omega_{\alpha\beta} = -\Delta \omega_{\beta\alpha}$$

Esta característica de simetría de la matriz infinitesimal $\delta \omega^{\alpha}_{\beta}$ veremos que juega un papel fundamental en la electrodinámica.

La matriz $\Delta \omega^{\mu}_{\alpha}$ es de la forma

$$\Delta \omega^{\mu}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta v^1/c & \Delta v^1/c & \Delta v^1/c \\ \Delta v^1/c & 0 & \Delta \omega^3 & -\Delta \omega^2 \\ \Delta v^1/c & -\Delta \omega^3 & 0 & \Delta \omega^1 \\ \Delta v^1/c & \Delta \omega^2 & \Delta \omega^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Evidentemente se verifica la propiedad del determinante de las matrices

$$|\Delta \bar{\mathcal{L}}| = |\bar{\mathcal{L}} - \Delta \bar{\omega}| = |e^{-\Delta \bar{\omega}}| = e^{\text{traza}(-\Delta \bar{\omega})} = 1$$

Un campo escalar ante una transformación de infinitesimal pasiva de Lorentz se transformará como

$$\begin{aligned} \phi(\bar{x}) &= \phi(\Delta \bar{\mathcal{L}}^{-1} \bar{x}) = \phi(x^{\alpha} + \Delta \omega^{\alpha}_{\sigma} x^{\sigma}) = \phi(\bar{x}) + \Delta \omega^{\alpha}_{\sigma} x^{\sigma} \partial_{\alpha} \phi(\bar{x}, t) + \dots = \\ &= \phi(\bar{x}) + \Delta \omega_{\mu\sigma} g^{\mu\alpha} x^{\sigma} \partial_{\alpha} \phi(\bar{x}, t) = \phi(\bar{x}) + \frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu\sigma} \mathcal{J}^{\mu\sigma} \phi(\bar{x}) \\ &= \phi(\bar{x}) + \frac{1}{2} \Delta \omega_{ik} \mathcal{J}^{ik} \phi(\bar{x}) + \Delta \omega_{0i} \mathcal{J}^{0i} \phi(\bar{x}) \end{aligned}$$

siendo el operador de momento angular el generador de las rotaciones

$$\mathcal{J}^{\mu\sigma} = (g^{\mu\alpha} x^{\sigma} \partial_{\alpha} - g^{\sigma\alpha} x^{\mu} \partial_{\alpha})$$

así como el operador de momento lineal al generador de las translaciones pasivas como

$$P_\alpha = \partial_\alpha$$

Separando la parte espacial de la temporal

$$\mathcal{J}^{ij} = (-x^j \partial_i + x^i \partial_j) = (-x^j P_i + x^i P_j)$$

$$\mathcal{J}^{0i} = x^i \partial_0 + x^0 \partial_i = \frac{x^i}{c} \partial_t + ct \partial_i = x^i \frac{\partial}{c \partial t} - ct P^i$$

y definiendo

$$\vec{J} \stackrel{\text{def}}{=} J^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \mathcal{J}^{ij}$$

$$K^i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}^{0i}$$

$$\Delta \omega^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \Delta \omega_{ij} = \Delta \theta \vec{n}$$

$$\frac{\Delta v^i}{c} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \omega_{0i} = -\Delta \omega_{0i}$$

donde ε_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de orden tres, se puede reescribir

$$\frac{1}{2} \Delta \omega_{ik} \mathcal{J}^{ik} = \Delta \theta \vec{n} \cdot \vec{J} + \vec{v} \cdot \vec{K} / c$$

Es el generador de la transformación vendrá dado por

$$G_\alpha^\beta \equiv \left. \frac{\partial \Delta \mathcal{L}}{\partial \Delta \omega_\beta^\alpha} \right|_{\Delta \omega=0}$$

De forma que para una transformación finita el operador será

$$U = e^{i G_\alpha^\beta \omega_\beta^\alpha} = e^{(\Delta \theta \vec{n} \cdot \vec{J} + \vec{v} \cdot \vec{K} / c)}$$

donde $\Delta \theta \vec{n}$ está asociado a una rotación espacial, y $\vec{v}/c$ a la velocidad de una transformación boost.

El operador de la transformación propia infinitesimal propia de Lorentz sobre un campo escalar se puede reescribir entonces en la forma

$$\Delta \mathcal{L} = I + \delta \theta \vec{n} \cdot \vec{J} + \delta \vec{v} \cdot \vec{K} / c$$

De esto se deduce también, que una transformación de Lorentz siempre se puede descomponer en una rotación espacial más una transformación boost pura de Lorentz.

Evidentemente los elementos del subgrupo grupo de transformaciones propias de Lorentz no conmutan entre sí, ya que conmutadores no se anulan y verifican las relaciones

$$[J^i, J^j] \phi \equiv (J^i J^j - J^j J^i) \phi \equiv \varepsilon^{ijk} J^k \phi$$

$$[J^i, K^j] \phi \equiv (J^i K^j - J^j K^i) \phi \equiv \varepsilon^{ijk} K^k \phi$$

$$[K^i, K^j] \phi \equiv (K^i K^j - K^j K^i) \phi \equiv \varepsilon^{ijk} J^k \phi$$

Las transformaciones boost no conmutan entre sí, y además $\vec{K}$ se comporta como un vector.

Para una transformación infinitesimal de Lorentz podemos escribir

$$\delta \phi(\vec{x}) = \phi'(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = \Delta \omega_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} \partial_{\alpha} \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu\sigma} J^{\mu\sigma} \phi(\vec{x}, t)$$

$$\delta \phi(\vec{x}) = \phi'(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = 0$$

Conviene comentar que un campo vectorial V^{α} tiene un generador diferente al de un campo escalar, ya que ante una transformación infinitesimal pasiva de Lorentz varía como

$$\begin{aligned} V^{\alpha'}(\vec{x}) &= \Delta L^{\alpha'}_{\beta} V^{\beta}(\Delta \bar{L}^{-1} \vec{x}) = (\delta_{\beta}^{\alpha'} - \Delta \omega_{\beta}^{\alpha'}) V^{\beta}(x^{\alpha} + \Delta \omega_{\beta}^{\alpha} x^{\beta}) \\ &= (\delta_{\beta}^{\alpha'} - \Delta \omega_{\beta}^{\alpha'}) \left(V^{\beta} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu\sigma} J^{\mu\sigma} V^{\beta} \right) \end{aligned}$$

Desarrollando en serie se llega a

$$\delta V^{\alpha'}(\vec{x}) = V^{\alpha'}(\vec{x}) - V^{\alpha'}(\vec{x}) = -\Delta \omega_{\beta}^{\alpha'} V^{\beta}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu\sigma} J^{\mu\sigma} V^{\alpha'}(\vec{x})$$

Evidentemente será también

$$\delta V^{\alpha} \equiv V^{\alpha}(\vec{x}') - V^{\alpha}(\vec{x}) = -\Delta \omega_{\beta}^{\alpha} V^{\beta}(\vec{x})$$

Por tanto se verifica

$$\delta V^{\alpha} = \tilde{\delta} V^{\alpha} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu\sigma} J^{\mu\sigma} V^{\alpha}$$

El anterior resultado se puede escribirse también como

$$\tilde{\delta} V^{\alpha} = -\Delta \omega_{\mu}^{\beta} g^{\alpha\mu} V^{\beta} = -\frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu}^{\sigma} (\delta_{\beta}^{\sigma} g^{\alpha\mu} - \delta_{\beta}^{\mu} g^{\alpha\sigma}) V^{\beta} = \frac{1}{2} \Delta \omega_{\mu}^{\sigma} (S^{\mu\sigma})^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}$$

siendo $(S^{\mu\sigma})^{\alpha}_{\beta}$ las denominadas matrices de espín

$$(S^{\mu\sigma})^{\alpha}_{\beta} = -(\delta_{\beta}^{\sigma} g^{\alpha\mu} - \delta_{\beta}^{\mu} g^{\alpha\sigma})$$

Isometría 10-paramétrica de las $\mathcal{P}$ -transformaciones de Poincaré

Las rotaciones espacio temporales propias de Lorentz $\bar{\mathcal{L}}$ dependen de 6 parámetros, más los 4 de las translaciones espacio temporales $\bar{\mathcal{T}}_e$ y $\mathcal{T}_t$, dependen de forman un total de 10 parámetros continuos $\vec{a}, \vec{n}\theta, t_0, \vec{v}_0$, que determinan las transformaciones de Poincaré.

La translación temporal como cambio en el tiempo está ligada a la dinámica, mientras las restantes 9 transformaciones son cinemáticas.

La inversión temporal $\mathcal{T}$, y las inversiones $\bar{\mathcal{P}}$, son transformaciones discretas, y que los sistemas dinámicos cumplen bajo ciertas restricciones.

Como la isometría de Poincaré depende de 10 parámetros, teniendo en cuenta la isotropía y la homogeneidad del espacio y del tiempo, existirán 10 magnitudes conservativas asociadas a dichos parámetros, correspondiente en este caso a $P^\alpha, L^{\alpha\beta}$, cuyas componentes son magnitudes aditivas que generan la conservación del momento total lineal $\vec{P}$, de la energía E , la conservación del momento angular $\vec{L}$, y la conservación del centro de energía $\vec{K} = (g^{0i})$.

Se puede definir también como sistema inercial relativísticamente aquél en que las magnitudes totales $\vec{P}, \vec{L}, \vec{K}, E$ para un sistema cerrado son conservativas y varían con el tiempo en ausencia de fuerzas externas.

Así mismo, es posible definir para una partícula un campo escalar L que sea invariante ante las 10 G -transformaciones de Poincaré en un espacio de Minkowski, debe verificar las relaciones de compatibilidad

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\partial L(x^\alpha, u^\alpha, \tau)}{\partial u^\alpha}$$

$$\partial_\mu L(x^\alpha, u^\alpha, \tau) \equiv \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(x^\alpha, u^\alpha, \tau)}{\partial u^\mu}$$

definiéndose

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

Los significados del campo electromagnético

Una función invariante de Poincaré que satisface todas estas condiciones, es la lagrangiana para una partícula aislada

$$L = -m_0 c \sqrt{U^\alpha U_\alpha}$$

de forma que será el momento canónico será

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial U^\alpha} = (\gamma m_0 c^2, -\gamma m_0 \vec{v})$$

$$\mathcal{P}^\alpha = (\gamma m_0 c^2, \gamma m_0 \vec{v}) = (m c^2, m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, m \vec{v}\right)$$

El momento es un invariante de las transformaciones de Poincaré, ya que se verifica

$$\mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha \equiv m_0^2 c^2$$

Sin embargo, en el caso relativista no todas las componentes son independientes, ya que se verifica en el caso de un sistema cerrado de forma general, que $\mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha$ es un invariante constante de Poincaré

$$\mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$$

Por lo que en relatividad el momento y la energía no son ya independientes.

Esta ecuación, nos permite también definir la masa m_0 , como el valor más bajo que puede tomar la energía en un sistema inercial. Esta matización es importante, pues en para una partícula compleja en un sistema en que se encuentra en reposo, en m_0 se incluyen también las energías internas de constitución.

Veremos más adelante, que la masa solo es constante en sistema cerrado donde no existan fuentes de energía de origen no mecánico. Sin embargo, la masa y la energía no son en relatividad tampoco dos entes independientes, y toda energía es está dotada de una masa inercial, y a la viceversa, la masa es una forma de energía.

Para un sistema aislado de partículas sin interacción el momento total es la suma de los momentos de todas las partículas individuales

$$\mathcal{P}^\alpha = \Sigma \mathcal{P}_r^\alpha$$

El vector centro de energía verifica la ecuación

$$c k^i \equiv \Sigma J_r^{0i} = x_c^0 \mathcal{P}_r^i - x_c^i \mathcal{P}_r^0 = c t p^i - x_c^i \frac{E}{c}$$

habiéndose definido el centro de energía como

$$x_c^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Sigma E_r x_r^i}{\Sigma E_r} = \frac{\Sigma E_r x_r^i}{E}$$

Respecto a este sistema se verifica

$$\vec{P} = \frac{E}{c^2 t} \vec{x}_c = \frac{E}{c^2} \frac{d\vec{x}_c}{dt} = m \frac{d\vec{x}_c}{dt}$$

por lo que el momento total es la energía por la velocidad del centro de energía.

Puesto que $(\mathcal{P}^\alpha) = (\mathcal{P}^0, \vec{P})$ es un cuadvivector temporal, existirá un sistema inercial respecto al cual el momento total lineal $\vec{P}$ se anula, y este coincidirá con el centro de energía.

El momento angular total $J^{\alpha\beta}$ de un sistema sin interacciones alrededor de un centro de sucesos x_0^α , se puede descomponer en el momento angular $l^{\alpha\beta}$ del centro de masas respecto al centro de sucesos y el momento angular orbital del sistema $s^{\alpha\beta}$ respecto del centro de gravedad x_c^α

$$\begin{aligned} J^{\alpha\beta} &= l^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta} \\ l^{\alpha\beta} &= (x^\alpha - x_0^\alpha) \mathcal{P}^\beta - (x^\beta - x_0^\beta) \mathcal{P}^\alpha \\ s^{\alpha\beta} &= (x^\alpha - x_c^\alpha) \mathcal{P}^\beta - (x^\beta - x_c^\beta) \mathcal{P}^\alpha \end{aligned}$$

Evidentemente $s^{\alpha\beta}$ verifica la relación invariante de ortogonalidad

$$s^{\alpha\beta} \mathcal{P}_\beta \equiv 0$$

Además de $\bar{\mathcal{P}}^2$, existe otro invariante de Poincaré, representado por el cuadvivector de Pauli y Lubanski definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\alpha &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\sigma} J_{\mu\sigma} \mathcal{P}_\nu \\ \mathcal{W}^{\alpha\beta} &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\sigma} \mathcal{W}_\sigma \mathcal{P}_\nu \end{aligned}$$

Puesto que $J_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico y $l^{\alpha\beta}$ es antisimétrico en $(x^\alpha - x_0^\alpha)$ y $\mathcal{P}^\beta$, entonces $\mathcal{W}^\alpha$ depende solo de $s^{\alpha\beta}$

$$\mathcal{W}^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\sigma} s_{\mu\sigma} \mathcal{P}_\nu$$

Se comprueba que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\alpha \mathcal{P}_\alpha &\equiv 0 \\ \mathcal{W}^{\alpha\beta} \mathcal{W}_{\alpha\beta} &\equiv \mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha \end{aligned}$$

Puesto que en un sistema cerrado, $s_{\mu\sigma}$ y $\mathcal{P}_\nu$ se conservan, también será una magnitud conservativa $\mathcal{W}^\alpha$, y además como $s_{\mu\sigma}$ es un tensor y $\mathcal{P}_\nu$ un cuadvivector, $\mathcal{W}^\alpha$ será también un cuadvivector y su norma es un invariante relativista, que se puede evaluar

respecto al sistema del centro de energía respecto al cual el momento total lineal se anula y $(\mathcal{P}_\nu) = (m_0 c, 0)$

$$\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}_c^\alpha \mathcal{W}_{c\alpha} = -\frac{1}{4} \varepsilon^{kij0} \varepsilon_{kln0} s_{ij} s^{ln} (\mathcal{P}_c^0)^2 = (m_0 c)^2 \vec{s}^2$$

siendo $\vec{s}$ la componente del espín tridimensional

$$\vec{s} = (s^k) = \frac{1}{2} \varepsilon^{kln} s_{ln}$$

Por la antisimetría de $\varepsilon^{\alpha\beta\mu}$, será ortogonales $\mathcal{W}^\alpha$ y $\mathcal{P}_\mu$, y por tanto $\mathcal{W}^\alpha$ es un cuadrivector de tipo espacial

$$\mathcal{W}^\alpha \mathcal{P}_\alpha \equiv 0$$

Para una partícula con masa en reposo m_0 , se define el espín $\mathcal{S} = (s^\alpha)$ como

$$s^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_0 c} \mathcal{W}^\alpha$$

$$s^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(m_0 c)^2} \mathcal{W}^{\alpha\beta}$$

Se demuestra que $\mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha$ y $\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha$ son los únicos operadores de Casimir que son invariantes bajo cualquier transformación del grupo de Poincaré que conmutan con todos los elementos del grupo, y que además, tienen como autovalores el espectro continuo $m^2 c^2$.

En el caso una partícula sin masa $\mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha = \mathcal{P}^\alpha \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{W}^\alpha \mathcal{P}_\alpha = 0$ y entonces $\mathcal{P}^\alpha$ y $\mathcal{W}^\alpha$ serán proporcionales, por lo que serán paralelos o antiparalelos según sea $\mathcal{W}^0 \mathcal{P}_0 > 0$ o $\mathcal{W}^0 \mathcal{P}_0 < 0$ conservándose en el tiempo este producto. Por ello se define como helicidad la magnitud conservativa para partículas sin masa

$$\hbar = \frac{\mathcal{W}^0}{\mathcal{P}_0} = -\frac{1}{2\mathcal{P}_0} \varepsilon^{0kln} \mathcal{J}_{kl} \mathcal{P}_n = \frac{1}{\mathcal{P}_0} \vec{J} \cdot \vec{P} = \vec{J} \cdot \vec{n}_{\vec{P}}$$

donde $\vec{n}_{\vec{P}}$ es un vector unitario en la dirección de propagación.

Para partículas sin masa como los fotones la helicidad es una constante invariante que puede tomar dos valores con signo opuesto, que están relacionados con las dos posibles polarizaciones circulares de la luz.

En mecánica cuántica se define la helicidad como $\vec{J} \cdot \vec{P} / \hbar$, y para una partícula con masa en número de valores que puede tomar depende del grado de multiplicidad del momento angular orbital.

Tensor de tensiones y de energía momento y principios de conservación

Todas las magnitudes conservativas pueden expresarse como una integración de las componentes de un tensor de energía impulso.

Se define t_m^{ij} como el flujo (densidad de momento*velocidad) i a través de la unidad de superficie en la dirección j .

Para un sistema de partículas sin interacción entre ellas $\Sigma p_r^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) = \Sigma m_r x_{r,t}^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$ es la densidad de momento, y $\Sigma m_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$ la densidad de masa de una partícula que se desplaza en una trayectoria $\vec{x}_r(t)$. De acuerdo con esto será

$$t_m^{ij}(\vec{x}, t) = \Sigma p_r^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) x_{r,t}^j = \Sigma m_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \frac{dx_r^i}{dt} \frac{dx_r^j}{dt}$$

El tensor simétrico t_m^{ij} se denomina tensor de tensiones de la materia incoherente, debido a la propiedad de que su divergencia está relacionada con la fuerza a la que está sometida la materia

$$\begin{aligned} \int_V \partial_k t_m^{ik} d^3x &= \int_S t_m^{ik} n_k dS = \int_V \Sigma m_r \partial_k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \frac{dx_r^k}{dt} \frac{dx_r^i}{dt} d^3x \\ &= - \int_V \Sigma m_r \frac{\partial}{\partial x_r^k} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \frac{dx_r^k}{dt} \frac{dx_r^i}{dt} d^3x = \\ &= - \int_V \Sigma m_r \frac{dx_r^i}{dt} \frac{d}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) d^3x = \int_V \Sigma m_r \frac{d^2 x_r^i}{dt^2} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) d^3x \\ &= \int_V f^i d^3x \end{aligned}$$

Donde $\vec{f} = (f^i)$ es la densidad de fuerza que actúa sobre la materia.

Esto nos dice que la fuerza total que actúa sobre un volumen viene representada por una integral sobre la superficie del tensor de tensiones

$$\int_V \partial_k t_m^{ik} d^3x = \int_V f^i d^3x$$

o también en forma diferencial local

$$\partial_k t_m^{ik} = f^i$$

Los significados del campo electromagnético

Sin embargo, el tensor de tensiones t_m^{ik} no es covariante. En formulación covariante se define el tensor de energía momento como

$$T_m^{\alpha\beta}(\bar{x}) = \Sigma \mathcal{P}_r^\alpha(t) \frac{dx_r^\beta}{dt} \delta(\bar{x} - \bar{x}_r(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma m_{0r} c \delta^4(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)) \frac{dx_r^\alpha}{d\tau} \frac{dx_r^\beta}{d\tau} d\tau$$

Es fácil comprobar que $T_m^{\alpha\beta}$ por su construcción es un tensor ante las transformaciones de Poincaré.

El significado de las componentes del tensor es el siguiente

$$\begin{aligned} T_m^{00} &= w_m && \text{Densidad de energía} \\ T_m^{k0} &= c g_m^k && \text{Densidad de momento } k * c \\ T_m^{0k} &= S_m^k / c && \text{Flujo de energía en la dirección } k / c \\ T_m^{ij} &= t_m^{ij} && \text{Tensor de tensiones} \end{aligned}$$

En caso presente de un sistema de partículas sin interacciones, debido a que todas magnitudes que definen el tensor son intensivas, ha sido suficiente bastaría sumarlas. Debido a este carácter aditivo del tensor energía impulso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $T_m^{\alpha\beta}$ es el tensor de toda la materia presente.

Sin embargo, si hay interacciones o como en el caso de un fluido existe una presión, el anterior tensor hay que modificarlo par incluir los efectos de la densidad de energía de la presión.

Es fácil comprobar que la divergencia del tensor de energía impulso de la materia es cero en el caso de un sistema cerrado

$$\partial_\beta T_m^{\alpha\beta} \equiv 0$$

Al estar la materia confinada en volumen finito

$$\begin{aligned} \partial_\beta T_m^{\alpha\beta} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma m_{0r} c \delta^4(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)) \frac{dx_r^\alpha}{d\tau} \frac{dx_r^\beta}{d\tau} d\tau = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma m_{0r} c \delta^4 \frac{d}{d\tau} \delta^4(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)) \frac{dx_r^\alpha}{d\tau} d\tau = - \Sigma m_{0r} c \delta^4 \delta^4(\bar{x} - \bar{x}_r(\tau)) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \equiv 0 \end{aligned}$$

De la anterior ecuación de continuidad se concluye que momento total integrado es una constante en el tiempo (que nos relaciona el momento total lineal y la energía)

$$\mathcal{P}^\alpha = \frac{1}{c} \int_{V_\infty} T_m^{\alpha 0} d^3x \quad y \quad \frac{d\mathcal{P}^\alpha}{dt} \equiv 0$$

Si se define el tensor $\mathcal{J}^{\alpha\beta\mu}$ en torno a un suceso $\bar{x}_0$ como

$$c\mathcal{J}_m^{\alpha\beta\mu} \stackrel{\text{def}}{=} (x^\alpha - x_0^\alpha)T_m^{\beta\mu} - (x^\beta - x_0^\beta)T_m^{\alpha\mu}$$

se comprueba que

$$\partial_\mu \mathcal{J}_m^{\alpha\beta\mu} \equiv 0$$

por lo que el tensor total $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$ (que determina el momento angular y centro de energía) integrado a todo el espacio es constante en el tiempo

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta} = \int_{V_\infty} \mathcal{J}_m^{\alpha\beta 0} d^3x \quad \text{y} \quad \frac{d\mathcal{J}^{\alpha\beta}}{dt} \equiv 0$$

Las 10 magnitudes conservativas de la isometría de Poincaré son solo una consecuencia de las propiedades de simetría de tensor de energía impulso y de su divergencia se nula para un sistema cerrado.

El concepto de tensor energía momento es un concepto que implica la idea de que mecánicamente la energía está localizada y puede fluir de un lugar a otro conservándose. Sin embargo, el concepto de conservación general de la energía local, de forma que la energía se puede transformar de una forma a otra es un postulado mucho más sutil.

Aunque el tensor de energía momento puede derivarse a partir de una lagrangiana, sin embargo este es una identidad más fundamental. El que adopte una forma tensorial de 4x4 es debido a las condiciones de invarianza ante las transformaciones de Poincaré, y a diferencia de la mecánica newtoniana, la energía y el momento no son entidades independientes.

El que todo sistema físico cerrado esté representado por un tensor de energía impulso simétrico cuya divergencia es cero se acepta como un postulado universal.

En el caso de que el sistema no sea cerrado y que se pueda descomponer en dos sistema físicos $T_1^{\alpha\beta}$ y $T_2^{\alpha\beta}$ que interaccionan

$$T^{\alpha\beta} = T_1^{\alpha\beta} + T_2^{\alpha\beta}$$

Al ser

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} \equiv 0$$

se debe cumplir

$$\partial_\beta T_1^{\alpha\beta} = -\partial_\beta T_2^{\alpha\beta} = \mathcal{F}^\alpha$$

donde $\mathcal{F}^\alpha$ desempeña el concepto de una densidad fuerza covariante, cuya componente temporal es el trabajo realizado por el sistema 2 sobre el sistema 1, y la componente espacial está relacionada con la fuerza clásica

$$\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}^\alpha) = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{f} \right)$$

Sin embargo, la descomposición no es única, ya que a $T_1^{\alpha\beta}$ y $T_2^{\alpha\beta}$ siempre se les puede sumar un tensor cuya divergencia sea nula, por lo que un tensor de energía momento no simétrico también es una indicación de que hay una interacción y el sistema no es no es cerrado. Sin embargo $\vec{\mathcal{F}}$ debe tener una representación única ya que debe ser un observable medible.

Vemos que solo considerando las propiedades geométricas de homogeneidad e isotropía del espacio y del tiempo, junto con el principio de causalidad es posible construir el núcleo de la dinámica clásica. La definición de fuerzas dada, es sin embargo, una convención geométrica. Para comprender su significado real, es necesario principios adicionales como los principios gauge, de equivalencia, o el principio cuántico, que profundicen sobre el origen de las interacciones, aunque siempre hay un condicionante es la geometría del espacio tiempo. Sobre todos estos temas se tratará en los siguientes capítulos, tomando como ejemplo el campo electromagnético y su interacción con la materia.